CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1989
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'algèbre

Cette épreuve se compose de 2 problèmes indépendants .

PREMIER PROBLEME

L'espace euclidien orienté usuel est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
a désigne un réel strictement positif fixé .

A tout couple (θ, λ) de réels , on associe le point $M(\theta,\lambda)$ de coordonnées :
$x = a\lambda \cos\theta$, $y = a\lambda \sin\theta$, $z = a\cos\theta$.

On notera D_θ la droite formée des points $M(\theta,\lambda)$ quand λ varie et Σ la surface engendrée par ces droites quand θ parcourt $\mathbb{R}$.

1) Y a-t-il des points stationnaires sur Σ ? Déterminer , en tout point $M(\theta,\lambda)$ régulier un vecteur normal à Σ .

2) Montrer qu'il existe deux sphères centrées sur Ox telles que , pour tout θ , la droite D_θ soit tangente à ces deux sphères .
On appellera S celle de ces sphères dont le centre A a une abscisse positive . Préciser son rayon .

3) a)- Calculer les coordonnées du point de contact $H(\theta)$ entre S et D_θ .
b)- Construire les projections sur les 3 plans de coordonnées de la courbe C décrite par $H(\theta)$ quand θ varie.
c)- Reconnaître le cône de sommet O engendré par les droites $OH(\theta)$.

4) Montrer qu'en tout point $H(\theta)$, S et Σ sont tangentes .

SECOND PROBLEME

E désigne un espace euclidien de dimension finie $n > 1$; on notera $< x,y >$ le produit scalaire des vecteurs x et y .

L(E) désigne l'algèbre des endomorphismes de E et on note I l'application identité de E . On rappelle que si f appartient à L(E) , alors f* est l'endomorphisme vérifiant pour tout
$(x, y) \in ExE$,
$< f^*(x),y > = < x,f(y) >$.

On dira que $f \in L(E)$ est symétrique si $f^* = f$, antisymétrique si $f^* + f = 0$.

On dira que f est réductible à la matrice M s'il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est M .

On dira que f vérifie P(a,b) si f est un automorphisme de E et si : $f^* = a f + b f^{-1}$, a et b désignant deux réels tels que $a^3 - a \neq 0$ et $b \neq 0$.

On dira que f vérifie Q(c) si $f^2 = c I$ avec $c \neq 0$.

Si f laisse stable un sous-espace V de E , on notera f_v l'endomorphisme de V défini par :
$f_v(x) = f(x)$ pour tout x de v .

Enfin on dira que 3 réels a , b , c vérifient (1) , (respectivement (2)) , si :
(1) $c(1-a) - b = 0$ et $c > 0$ (resp. (2) $c(1+a) + b = 0$ et $c < 0$) .

1) Montrer que si $\forall x \in E$, $< f(x) , x > = 0$, alors f est antisymétrique ; en déduire que si $f^* = af$ pour un réel a , alors f est symétrique ou antisymétrique ; que peut-on dire de $n = \dim E$ si f est antisymétrique et bijective ?

2) Montrer que f^*f est diagonalisable , que ses valeurs propres sont positives et que f est nul si f^*f est nul .

3) Soit V un sous-espace de E . Si $f \in L(E)$ laisse stables V et son orthogonal $V^{\perp}$ montrer qu'alors f^* laisse stable V et que : $(f^*)_v = (f_v)^*$.

4) Si f est symétrique et vérifie Q(a) , montrer que $a > 0$ et que f est réductible à un matrice de la forme :

$$\sqrt{a}\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{bmatrix} .$$

5) On suppose dans cette question que f est antisymétrique et vérifie la propriété Q(a) .
a- Montrer que $n = \dim E$ est pair et que $a < 0$; on posera $n = 2p$ et $a = -\alpha^2$.
b- Soit x un vecteur unitaire de E ; montrer que le plus petit sous-espace stable par f et contenant x est un plan et que (x,f(x)) en est une base orthogonale .
c- En déduire que f est réductible à la matrice αJ ,

$$\text{avec : } J = \begin{bmatrix} & & & & -1 \\ & 0 & & \iddots & \\ & & -1 & & \\ & & 1 & & \\ & \iddots & & 0 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

6) Soit $f \in L(E)$ vérifiant Q(c) et P(a,b) . Montrer qu'alors :
a- Si n est impair a , b et c vérifient (1) et que f est symétrique ; à quel type de matrices f est-il réductible?
b- Si n est pair , f est symétrique ou antisymétrique , que a , b et c vérifient (1) ou (2) ; si (2) est vérifiée , à quelle matrice f est-elle réductible ?

7) Soit f vérifiant P(a,b) . Montrer que :

a) $g = f^2$ est symétrique ,

b) $g^2 = (ag + bI)^2$

c) Il existe deux sous-espaces V et W orthogonaux , supplémentaires et stables par f tels que f_v et f_w soient l'un symétrique , l'autre antisymétrique . Discuter selon a et b à quelle(s) formes(s) de matrices f est réductible ?

8) On prend ici $E = \mathbb{R}^3$. On identifie la matrice A carrée 3x3 et l'endomorphisme $f : X \longrightarrow AX$. On note ${}^tA$ la transposée de A et $\hat{A}$ la transposée de la matrice des cofacteurs de A , c'est à dire la matrice $(A_{ji})_{1\le i,j\le 3}$ où A_{ij} est le cofacteur de a_{ij} $1\le i,j\le 3$;
On rappelle que l'on a : $A\hat{A} = \hat{A}A =$ dét(A) I
On suppose que la matrice A vérifie : $2\,{}^tA = A + \hat{A}$.
a- Montrer que si A n'est pas inversible , alors A = 0 .

b- Si A est inversible , chercher les valeurs possibles de dét(A) .

c- Montrer que hormis les cas triviaux $A = I$ et $A = 0$, A est réductible à l'une ou l'autre de deux matrices que l'on précisera .

==========